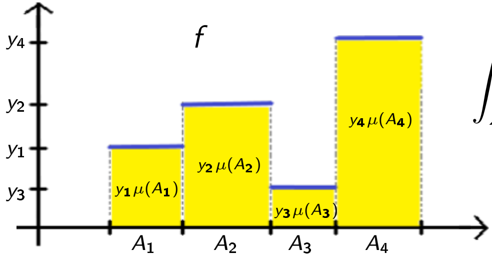
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 9

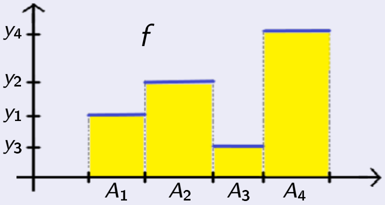
Całka z funkcji nieujemnej



$$\int_X f\,d\mu = y_1\mu(A_1)+y_2\mu(A_2) + y_3\mu(A_3)+y_4\mu(A_4)$$

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą.

Def. Jeżeli $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ jest nieujemną funkcją prostą, $\{y_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}^+$ i $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}$, to wartość



$$\int_X f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$$

nazywamy **całką** z funkcji f względem miary μ.

Mówimy, że f jest **całkowalna** jeżeli $\int_X f\, d\mu < \infty$ (konwencja $0 \cdot \infty = 0$)

Lem. Powyższa definicja jest poprawna (nie zależy od przedstawienia f).

Dowód: $\sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} z_j \mathbb{1}_{B_j} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} z_j \mu(B_j)$

Prz. $\int_X \mathbb{1}_A\, d\mu = \mu(A)$, dla $A \in \mathcal{F}$ $\quad (\mathbb{1}_A$ całkowalna $\iff \mu(A) < \infty)$

Np. $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, czyli $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ jest λ-całkowalna.

Stw. Dla $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ nieujemnych oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mamy

1. $\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$ *(„dodatnia liniowość")*
2. $f \leqslant g \implies \int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu$ *(monotoniczność)*

Dowód: (1). Niech $f = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}$ oraz $g = \sum_{j=1}^m z_j \mathbb{1}_{B_j}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ oraz $\{B_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{F}$ rozbicia przestrzeni X. Wtedy

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha y_i + \beta z_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

oraz $\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \overset{add}{=} \mu(\bigsqcup_{j=1}^m A_i \cap B_j) = \mu(A_i \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = \mu(A_i)$ i podobnie $\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j)$. Stąd

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu &\overset{def}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha y_i + \beta z_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha y_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta z_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\
&\overset{add}{=} \sum_{i=1}^n \alpha y_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta z_j \mu(B_j) \overset{def}{=} \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu
\end{aligned}$$

(2). Jeśli $f \leqslant g$, to $g = f + (g - f)$ jest sumą funkcji prostych nieujemnych i stąd $\int\limits_X g \, d\mu \overset{(1)}{=} \int\limits_X f \, d\mu + \int\limits_X g - f \, d\mu \geqslant \int\limits_X f \, d\mu$. ■

Uw. Jeżeli $f \geqslant 0$ nieujemna funkcja mierzalna, to $f = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, gdzie $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ nieujemne funkcje proste takie, że $f_n \nearrow f$ (**Wykład 8**)

Def. Całkę z funkcji mierzalnej nieujemnej $f \geqslant 0$ definijumy jako

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X h \, d\mu : 0 \leqslant h \leqslant f, \ h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\}.$$

Powiemy, że f jest całkowalna, jeżeli $\int_X f \, d\mu < \infty$.

Uw. Powyższa definicja jest zgodna z poprzednią.

Lem. $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $0 \leqslant f \leqslant g \Longrightarrow \int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu$.

Dowód: $\int\limits_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X h \, d\mu : 0 \leqslant h \leqslant f, \ h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\}$

$\leqslant \sup \left\{ \int_X h \, d\mu : 0 \leqslant h \leqslant g, \ h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\} = \int g \, d\mu$ ■

Tw. (Leviego) o zbieżności monotonicznej


Beppo Levi

$$\left(\begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ mierzalne} \\ \text{nieujemne oraz } f_n \nearrow f \end{array}\right) \implies \int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

Dowód: $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots \implies \int_X f_1\,d\mu \leqslant \int_X f_2\,d\mu \leqslant \ldots$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu$ istnieje. Ponadto $\int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu$, bo $f_n \leqslant f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu.$$

Aby wykazać nierówność przeciwną weźmy $h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, gdzie $0 \leqslant h \leqslant f$. Potrzebujemy pokazać, że

$$\int_X h\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

W tym celu ustalmy $\alpha \in (0,1)$ i zauważmy, że skoro $f_n(x) \nearrow f(x)$, to

$$\forall_{x\in X}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\quad \alpha f(x) \leqslant f_n(x).$$

Zatem zbiory $B_n := \{x \in X : \alpha f(x) \leqslant f_n(x)\} \in \mathcal{F}$ pokrywają całą przestrzeń X oraz $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$. Czyli $B_n \nearrow X$. Ponadto

$\alpha h \mathbb{1}_{B_n} \overset{h \leqslant f}{\leqslant} \alpha f \mathbb{1}_{B_n} \overset{\text{def } B_n}{\leqslant} f_n \mathbb{1}_{B_n} \leqslant f_n$. Stąd dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \leqslant \int_X f_n \, d\mu. \qquad (*)$$

Niech $h = \sum_{i=1}^{N} y_i \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathcal{F}$. Na mocy ciągłości miary

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_n) \overset{B_n \nearrow X}{=} \mu(A_i \cap X) = \mu(A_i), \qquad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Zatem

$$\int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu = \alpha \int_X \sum_{i=1}^{N} y_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_n} \, d\mu = \alpha \sum_{i=1}^{N} y_i \mu(A_i \cap B_n)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \alpha \sum_{i=1}^{N} y_i \mu(A_i) = \alpha \int_X h \, d\mu.$$

Czyli

$$\alpha \int_X h \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \overset{(*)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Przechodząc z $\alpha \to 1$ dostajemy $\displaystyle\int_X h \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ ■

Wn1. Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ nieujemnych oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mamy

1. $\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$ *(„dodatnia liniowość")*
2. Jeśli $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

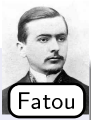
$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu. \qquad \left(\begin{array}{c}\textit{całkowanie szeregu} \\ \textit{wyraz po wyrazie}\end{array}\right)$$

Dowód: (1). Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ funkcje proste takie, że $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. Wtedy $\mathcal{E}(\mathcal{F}) \ni \alpha f_n + \beta g_n \nearrow \alpha f + \beta g$ i stąd

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu &\overset{\textbf{Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha f_n + \beta g_n \, d\mu \\ &\overset{\textbf{Stw}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int_X f_n \, d\mu + \beta \int_X g_n \, d\mu \right) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \\ &\overset{\textbf{Levi}}{=} \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu\end{aligned}$$

(2). Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$. Sumy częściowe $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ są mierzalne (bo $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ przestrzeń liniowa) oraz $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n \nearrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, skąd $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ (jako granica funkcji mierzalnych). Ponadto

$$\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \overset{\textbf{Levi}}{=} \lim_{N\to\infty} \int\limits_X \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu \overset{(1)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_X f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu \quad \blacksquare$$



Wn2. (Lemat Fatou) Dla $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geqslant 0$, mamy

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \textit{(półciągłość z dołu)}$$

Dowód: Przypomnijmy, iż $\inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x) \nearrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Zatem

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \overset{\textbf{Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\geqslant n} f_k \, d\mu \leqslant \left\{ \begin{matrix} \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x) \leqslant f_n(x) \\ \text{monotoniczność całki} \end{matrix} \right\}$$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Prz1. Niech $(X,\mathcal{F},\mu)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ oraz niech

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x\in[0,n], \\ 0, & x\notin[0,n]. \end{cases}$$

Wtedy f_n zbiega (i to nawet jednostajnie) do zera, ale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \frac{1}{n}\cdot\lambda([0,n]) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda$$

Prz2. Niech $(X,\mathcal{F},\mu)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ oraz

$$f_n := \frac{1}{n}(x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]}, & n \text{ parzyste} \\ \mathbb{1}_{(1,3]}, & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Wtedy $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nie istnieje dla $x\in[0,3]$, ale dla $x\in\mathbb{R}$ mamy $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Ponadto

$$\int_{\mathbb{R}} f_{2n}\,d\lambda = \lambda([0,1]) = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathbb{R}} f_{2n+1}\,d\lambda = \lambda((1,3]) = 2.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$ nie istnieje, ale $\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = 1$. Czyli

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = 0 < 1 = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$